DE LA

VARIATION

DE LA LATITUDE DES ÉTOILES FIXES

ET DE L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE.

PAR M. EULER.

I.

Ce ſont deux queſtions de la derniere importance dans l'Aſtronomie, que je me propoſe d'éclaircir dans ce Mémoire, & de mettre dans un tel jour, qu'il n'y reſte plus le moindre doute. On ſait que les Aſtronomes ont été fort partagés ſur ces deux queſtions ; les uns ayant nié abſolument, que la latitude des étoiles fixes, & l'obliquité de l'écliptique, fuſſent aſſujetties à aucun changement, pendant que d'autres ſe ſont declarés pour le ſentiment contraire. Les uns & les autres ont cru avoir les obſervations de leur côté ; & quand ils ne les ont pas trouvées aſſés d'accord avec leur ſyſtème, ils en ont attribué la cauſe au défaut de préciſion des anciennes obſervations. Et en effet, ſi les anciennes obſervations étoient auſſi exactes que les modernes, il ne ſauroit y avoir le moindre doute ſur ces deux queſtions ; l'intervalle de plus de deux mille ans, dont on pourroit comparer les obſervations, ſeroit plus que ſuffiſant pour décider l'une & l'autre. Mais, puiſque les anciennes obſervations ſont fort défectueuſes, & que leurs erreurs montent ordinairement à pluſieurs minutes, il eſt évident qu'on ne ſauroit s'en ſervir pour décider des queſtions, où il ne s'agit que de quelques minutes de changement dans l'eſpace de pluſieurs ſiècles : or c'eſt préciſément le cas, où nous nous trouvons à l'égard des deux queſtions propoſées.

II.

II. M. le *Monnier*, dans la Préface de ſes Inſtitutions d'Aſtronomie, a examiné fort ſoigneuſement ces deux queſtions; & après avoir bien dévelopé les raiſons, qu'on allégue de part & d'autre, il conclud qu'on n'en ſauroit tirer aucune preuve convainquante, ni pour la diminution de l'obliquité de l'écliptique, ni pour quelque changement dans la latitude des étoiles fixes. Il s'oppoſe fort vigoureuſement au ſentiment de M. le Chevalier *de Louville*, qui avoit ſoutenu, que l'obliquité de l'écliptique diminuoit d'une minute pendant le cours de chaque ſiècle, & il remarque très judicieuſement, que quand même une telle diminution auroit lieu, elle ne ſauroit être ſi conſidérable. Pour la latitude des étoiles fixes, il tombe bien d'accord que celle de quelques unes a fort changé; & il remarque que la latitude d'*Arcturus* avoit diminué de plus de 2 minutes dans l'eſpace de 50 ans. Or, en cas que ce changement fut fondé, il faudroit ſans doute l'attribuer à quelque mouvement tout particulier de cette étoile, puiſqu'il ne ſe trouve pas en d'autres, dont la poſition eſt à peu près la même. Il trouve auſſi une augmentation d'une minute dans la latitude de *Fomalhaut* pendant l'eſpace de 50 ans, laquelle devroit également être l'effet de quelque mouvement particulier, en cas qu'elle fût bien conſtatée. Auſſi ne regarde-je point tels changemens réels, s'il y en a, dans mes recherches; mais j'enviſage plutôt les étoiles fixes comme dans un repos parfait par rapport à l'eſpace abſolu, & je n'ai égard qu'aux changemens apparens, qui ſont cauſés par quelque variation dans la poſition du plan de l'écliptique. Or il eſt évident que ſi un tel changement a lieu, il en doit réſulter un, tant dans l'obliquité de l'écliptique, que dans la latitude des étoiles fixes.

III. Cependant il eſt très certain, que les anciens Aſtronomes ont trouvé l'obliquité de l'écliptique plus grande, qu'on ne la trouve aujourdhui, & que plus nous remontons dans l'antiquité, nous y rencontrons auſſi une plus grande augmentation. *Pytheas* 300 ans avant J. C. la fait de $23°, 52'\frac{1}{2}$. *Hipparque* environ 150 ans avant J. C. de $23°, 51'\frac{1}{3}$, à laquelle *Ptolemée* s'arrête auſſi. 750 ans après

J.-C. *Albategnius* la détermina de 23°, 35′, & cette même quantité fut reconnuë à peu près par les Arabes du 9me Siècle. Or l'an 901. *Thebit* l'avoit déterminée de 23°, 33′½; & *Mahmud* A. 992. de 23°, 32′⅓. Enſuite *Ulugh Beigh* la trouva de 23°, 30′⅓ vers le milieu du 15me Siècle. Enfin on ſait que *Tycho*, & d'autres Aſtronomes du 16me Siècle, l'ont établie de 23°, 31′, & enſuite de 23°, 30′, & que ce n'eſt qu'au ſiècle paſſé, qu'on la réduiſit à 23°, 29′, & à préſent même à 23°, 28′, 30″. Cependant il faut avoüer que *Copernic* l'avoit déjà presque trouvée comme aujourdhui, mais il faut auſſi convenir, qu'une erreur de deux minutes lui auroit bien pu échaper, ce qui paroit au moins plus probable que d'accuſer les plus anciennes d'une de 20 minutes. Au reſte, quoiqu'on ne puiſſe compter à quelques minutes près ſur les obſervations des anciens, & qu'on n'en ſauroit conclure la véritable diminution, en cas qu'il y en eut une; il ſemble pourtant très certain, que l'obliquité de l'écliptique ait été autrefois conſidérablement plus grande, qu'elle n'eſt aujourdhui. Car il n'eſt pas probable, que tous auroient commis des erreurs dans le même ſens, & la diminution ſucceſſive fournit une nouvelle preuve pour ce ſentiment, quelque groſſières qu'ayent été les premières obſervations. Or il faut bien diſtinguer ce changement, que les obſervations anciennes ſemblent indiquer dans l'obliquité de l'écliptique, de la variation périodique, qu'on a découverte depuis peu, & qui vient de la nutation de l'axe de la terre; celle-cy étant fort petite, & achevant ſes périodes avec les nœuds de la Lune. Ainſi indépendamment de cette variation on demande, ſi l'obliquité moyenne de l'ecliptique a été de tout tems la même, ou ſi elle a diminué jusqu'à preſent?

IV. Quoiqu'il me ſemble, que les obſervations rapportées prouvent ſuffiſamment la diminution, je conviens aiſément qu'on ne ſauroit s'en ſervir pour déterminer la véritable quantité de cette diminution. Si l'on compare l'obliquité de *Pytheas* de 23°, 52′½, avec celle d'aujourdhui, on trouve pour l'intervalle 20½ ſiècles une diminution de 24′, ce qui donneroit pour un ſiècle 1′, 2″. Or les déterminations

tions de *Thebit* & *Mahmud* donnent 34″ de diminution pour un ſiècle ; mais celles des Arabes du neuvième ſiècle donnent 47″ : d'où l'on doit vraiſemblablement conclure, que *Pytheas* s'eſt trompé de pluſieurs minutes en excès, & *Thebit* avec *Mahmud* de quelques unes en défaut. Car en vouloir conclure, qu'il n'y a point eu du tout de changement dans l'obliquité de l'écliptique, cela ſeroit ſans doute trop hardy, & ne ſauroit être ſoutenu, à moins qu'on ne fût en état de faire voir inconteſtablement par la Théorie, qu'un tel changement eſt tout à fait impoſſible. Or c'eſt apparement ce, ſur quoy ſe fondent ceux qui nient abſolument un tel changement dans l'obliquité de l'écliptique : & depuis qu'on a découvert la variation périodique, ou la nutation de l'axe de la terre fondée ſur la Théorie du grand *Newton*, il ſemble qu'on a raiſon de rejetter cet autre changement, attendu que perſonne n'a encore montré, comment un tel changement pourroit être produit conformément à cette Théorie. Comme le changement de la latitude des étoiles fixes eſt ſi intimément lié avec celui de l'obliquité de l'écliptique, M. le *Monnier* nie abſolument, que l'action des planetes pourroit produire un tel effet ſur la terre, & ce même ſentiment paroit aſſés général, que ſuivant la Théorie de *Newton* la ſituation du plan de l'écliptique ne ſauroit être ſenſiblement altérée.

V. Or, quand on regarde la choſe d'un autre point de vuë, & qu'on réfléchit que les plans des orbites des planetes ne ſont pas fixes, mais mobiles, conformément à cette rétrogradation lente, qui convient à leurs nœuds, on changera bientôt de ſentiment. Car, puiſque les nœuds de l'orbite de Mars, par exemple, reculent tous les ans de 12″ par rapport aux étoiles fixes, cette orbite ſera ſans doute aſſujettie à quelque variation, & partant les habitans de Mars remarqueront avec le tems quelque changement dans la latitude des étoiles fixes. Un ſemblable phénomene ſera auſſi apperçu par les habitans des autres planetes, entant que leurs orbites ſont mobiles, comme on en eſt aujourdhui bien aſſuré par les obſervations. Donc, ſi par rapport aux habitans de toutes les autres planetes la latitude des étoiles fixes eſt variable, avec quelle rai-

ſon pourroit-on ſoutenir que ceux de la terre ſeroient exemts d'un pareil événement ? Or le mouvement des nœuds des planetes eſt non ſeulement ſuffiſamment conſtaté par les obſervations ; mais il n'y a aucun doute, qu'il ne ſoit parfaitement conforme à la Théorie de *Newton* ; depuis qu'on eſt aſſeuré, que le mouvement obſervé des nœuds de la Lune répond exactement à la même Théorie. Enſuite les dérangemens, qu'on obſerve dans le moûvement de Saturne, nous convainquent inconteſtablement, qu'outre la force qui pouſſe les planetes principales vers le Soleil, il y en a encore, dont les planetes ſont pouſſées les unes vers les autres, & que ces forces ſuivent également la raiſon renverſée des quarrés des diſtances. D'où l'on peut tirer cette concluſion générale, que chaque planete, & partant auſſi la terre, eſt attirée non ſeulement vers le Soleil, mais auſſi vers chacune des autres planetes : & de là il s'enſuit, qu'entant que les planetes ne ſe trouvent pas dans le même plan, les plans de leurs orbites en doivent néceſſairement ſouffrir quelque variation.

VI. Tout revient donc à examiner l'effet, que l'action des autres planetes eſt capable de produire dans la poſition du plan de l'orbite de la terre ; & il eſt évident que de cet effet doit réſulter une altération, tant dans la latitude apparente des étoiles fixes, que dans l'obliquité de l'écliptique. C'eſt donc le problème propoſé par l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'année prochaine, qui nous doit fournir les éclairciſſemens néceſſaires ſur les deux queſtions propoſées ; or, puiſque le même problème s'étend auſſi aux autres inégalités, qui y ſont cauſées dans ſon mouvement, & dans le lieu de ſon aphélie, je me bornerai ici uniquement à indiquer les changemens, que l'action des planetes doit produire dans la poſition du plan de l'orbite de la terre. De là il arrive, que ſi l'on rapporte l'orbite de la terre à celle d'une autre planete, leur interſection mutuelle, ou la ligne des nœuds, en acquiert un petit mouvement en arrière, ſemblable à celui qu'on remarque dans les nœuds de la Lune ; & à la rigueur l'inclinaiſon même, tout comme celle de la Lune, ſera aſſujettie à quelques changemens :

mais

mais ceux-cy étant abſolument imperceptibles, & ſe remettant parfaitement après chaque période, il n'en ſauroit réſulter aucun phènomene ſenſible. De ſorte qu'on peut hardiment ſuppoſer, que l'inclinaiſon de l'orbite de la terre à celle de chaque autre planete demeure inaltérable, & qu'il n'y arrive d'autre changement, que dans le lieu de leur interſection, qui ne devient ſenſible qu'après pluſieurs années. Or, quoique les plans des orbites des autres planetes ſoient également variables, on les peut néanmoins regarder comme fixes, du moins pour le tems de pluſieurs années, & même de quelques ſiècles, au bout desquels on pourra de nouveau tenir compte de la vraye poſition mutuelle, qui aura alors lieu.

VII. Puisque l'action de chaque planete ſur la terre eſt extrêmement petite, on peut déterminer ſéparément l'effet de chacune, vu que celui de l'une ne ſauroit être troublé par les autres. Et quoique l'orbite de chaque planete ne ſoit pas immobile, il ſera permis dans cette recherche de la regarder comme telle. Rapportons donc tout à la Sphère du monde, dont le centre ſoit C, qu'on peut ſuppoſer au milieu du Soleil, & que le grand cercle AEB repréſente le plan de l'orbite d'une planete, dont on recherche l'action ſur l'orbite de la terre, qui ſoit repréſentée par le grand cercle FEG, qui coupe l'autre en E, qu'on peut nommer le nœud aſcendant de l'orbite de la terre ſur celle de la planete, ſuppoſé que les lettres F, E, G, ſe ſuivent ſelon l'ordre des ſignes celeſtes; & l'angle BEG marquera l'inclinaiſon mutuelle des deux orbites. Maintenant concevons, que le cercle AEB demeurant immobile, l'autre FEG gliſſe inſenſiblement en arrière en conſervant toujours la même inclinaiſon, de ſorte qu'après quelque tems il parvienne dans la ſituation *feg*, le nœud E étant reculé cependant par l'eſpace *Ee*. Cela poſé, il eſt clair que la latitude de la plupart des étoiles fixes, que je ſuppoſe conſerver toujours la même ſituation par rapport au cercle AEB, ſera changée par le transport de l'écliptique FEG en *feg*. Or, pour déterminer ce changement, on n'a qu'à tirer d'une étoile quelconque S perpendiculairement ſur Fig. 1.

les deux poſitions de l'écliptique FEG & *feg* les arcs de grands cercles SL & S*l*. Car, puisque ces arcs meſurent la latitude de l'étoile S pour les deux poſitions propoſées de l'écliptique, leur différence donnera le changement, qui ſera arrivé dans la latitude de l'étoile S, pendant que l'écliptique aura paſſé de la poſition FEG en *feg*. Pour faire cette recherche il faut tirer par l'étoile S un grand cercle Z S T perpendiculaire ſur l'orbite de la planete, dont la portion S T repréſentera la latitude de cette étoile par rapport à l'orbite de la planete, que je conſidére comme conſtante, de même que ſa longitude à ce même égard, qu'on peut indiquer par l'arc A T, prenant pour A un point fixe à volonté.

VIII. Cherchons donc pour le tems, où le nœud de la terre a été en E la latitude d'une étoile quelconque donnée S. Pour cet effet poſons

$$\text{l'arc } AT = t \; ; \quad \text{l'arc } TS = s,$$

enſuite l'arc $AE = z$, & l'angle $BEG = \alpha$, qui eſt conſtant. De là ayant d'abord dans le triangle E T V rectangle en T le côté $ET = t - z$, avec l'angle $TEV = \alpha$, on en tirera :

$$\text{tang } EV = \frac{\text{tang}(t-z)}{\text{cof}\,\alpha} \; ; \quad \text{tang } TV = \text{tang}\,\alpha \,\text{ſin}\,(t-z),$$

$$\& \qquad \text{cof } EVT = \text{ſin}\,\alpha \,\text{cof}\,(t-z).$$

Soit maintenant pour abréger $TV = v$, & $EVT = \omega$, de ſorte que

$$\text{tang}\, v = \text{tang}\,\alpha \,\text{ſin}\,(t-z) \; ; \quad \text{cof}\,\omega = \text{ſin}\,\alpha \,\text{cof}\,(t-z), \quad \& \text{ partant}$$

$$\text{ſin}\, v = \frac{\text{ſin}\,\alpha \,\text{ſin}\,(t-z)}{\sqrt{[1-\text{ſin}\,\alpha^2 \,\text{cof}(t-z)^2]}} \; ; \quad \text{cof}\, v = \frac{\text{cof}\,\alpha}{\sqrt{[1-\text{ſin}\,\alpha^2 \,\text{cof}(t-z)^2]}}$$

$$\text{ſin}\,\omega = \sqrt{[1-\text{ſin}\,\alpha^2 \,\text{cof}(t-z)^2]} \; ; \quad \text{tg}\,\omega = \frac{\sqrt{[1-\text{ſin}\,\alpha^2 \,\text{cof}(t-z)^2]}}{\text{ſin}\,\alpha \,\text{cof}\,(t-z)}$$

Enſuite on connoit dans le triangle VSL rectangle en L le côté

$$SV = s - v, \quad \text{avec l'angle } SVL = \omega,$$

d'où

d'où l'on trouve :

$$\text{fin SL} = \text{fin}\,\omega\,\text{fin}\,(s-v) = \text{fin}\,\omega\,(\text{fin}\,s\,\text{cof}\,v - \text{cof}\,s\,\text{fin}\,v)$$

$$\text{cot VSL} = \text{tang}\,\omega\,\text{cof}(s-v) = \text{tang}\,\omega(\text{cof}\,s\,\text{cof}\,v + \text{fin}\,s\,\text{fin}\,v)$$

$$\text{tang VL} = \text{cof}\,\omega\,\text{tang}\,(s-v) = \text{cof}\,\omega.\,\frac{\text{tang}\,s - \text{tang}\,v}{1 + \text{tang}\,s\,\text{tang}\,v}.$$

Donc, ſi nous remettons pour v & ω les valeurs indiquées, nous trouverons : $\text{fin SL} = \text{cof}\,\alpha\,\text{fin}\,s - \text{fin}\,\alpha\,\text{cof}\,s\,\text{fin}\,(t-z)$

$$\text{cot VSL} = \frac{\text{cof}\,\alpha\,\text{cof}\,s}{\text{fin}\,\alpha\,\text{cof}(t-z)} + \text{fin}\,s\,\text{tang}(t-z)$$

$$\text{tang VL} = \text{fin}\,\alpha\cos(t-z).\,\frac{\text{tang}\,s - \text{tang}\,\alpha\,\text{fin}\,(t-z)}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,s\,\text{fin}\,(t-z)}.$$

Ayant trouvé l'arc VL on n'a qu'à y ajouter celle de l'arc EV pour avoir l'arc EL qui marque la longitude de l'étoile S comptée depuis le nœud E : or l'arc SL exprime ſa latitude, tant que le nœud eſt en E, d'où l'on peut juger combien elle varie par le mouvement du nœud.

IX. Pour ſe former une idée plus claire du changement, auquel la latitude des étoiles eſt aſſujettie, on n'a qu'à conſidérer une période entiere, où l'écliptique aura achevé une révolution ſur l'orbite de la planete, après laquelle le nœud E ſera rétabli au même endroit. Pendant cet intervalle de tems, qui comprend pluſieurs milliers d'années, la latitude de la même étoile S aura été une fois la plus petite : & puiſque nous venons de trouver $\text{fin SL} = \text{cof}\,\alpha\,\text{fin}\,s - \text{fin}\,\alpha\,\text{cof}\,s\,\text{fin}\,(t-z)$, il eſt évident, que la latitude SL ſera la plus petite, lorsque l'angle $t-z$, ou l'arc ET, devient de 90°, car alors la latitude de l'étoile S ſera $= s - \alpha$. Or une demi-révolution après, lorsque l'arc $\text{ET} = t-z$ ſera de 270°, la latitude deviendra $= s + \alpha$, & partant le changement entier, depuis la plus petite jusqu'à la plus grande latitude, ſera $= 2\alpha$, c'eſt à dire au double de l'angle BEG, qui meſure l'inclinaiſon de l'écliptique à l'orbite de la planete. Cependant cette

cette concluſion ne ſauroit être aſſés juſte, à cauſe que j'ai ſuppoſé immobile le plan de l'orbite de la planete; car celui-cy étant pareillement aſſujetti à l'action des autres planetes, ſouffrira avec le tems un changement aſſés conſidérable. Donc notre détermination ne ſauroit avoir lieu que pour un tems, pendant lequel le mouvement du nœud E ne recule pas par un eſpace trop conſidérable; or, puisque ce mouvement eſt extrêmement lent, on pourra employer nos formules pendant un aſſés long tems, & même de pluſieurs ſiècles, comme on verra par la ſuite. Mais, ſi l'on vouloit remonter à des epoques plus reculées, on n'auroit qu'à rectifier les élémens du calcul pour ce tems là, & établir de nouveau conformément à la vérité la poſition tant du plan de l'orbite de la planete que de l'écliptique avec leur inclinaiſon mutuelle, de laquelle on pourra ſe ſervir de nouveau pendant le cours de pluſieurs ſiècles. Et par ce moyen on pourra toujours être aſſuré de la juſteſſe des concluſions, qu'on tirera de notre calcul, pourvu que les élémens ſoient juſtes pour un tems, qui n'en ſoit pas éloigné d'un trop grand nombre de ſiècles.

X. Or pour l'uſage de l'Aſtronomie ces bornes ſont aſſés étenduës, & on peut ſe contenter quand on eſt en état de déterminer les changemens, qui doivent ſe trouver dans la latitude des étoiles pendant le cours de quelques ſiècles. Suppoſons que pendant un ſiècle le nœud E recule par l'eſpace $Ee = \varepsilon$, & voyons de combien la latitude de chaque étoile en doit être changée; car ayant trouvé ce changement on comprend aiſément, que celui qui répond à deux ou pluſieurs ſiècles ſera deux ou autant de fois plus grand, pourvu que le nombre des ſiècles ne ſoit pas trop grand. Dans cette recherche on pourra regarder l'eſpace ε comme un infiniment petit, & puisque l'arc $AE = z$, diminuë de ε pendant un ſiècle, on pourra ſuppoſer $dz = -\varepsilon$. Donc la latitude de l'étoile S étant à preſent $= SL$, elle ſera après un ſiècle $= Sl$, de ſorte que:

$$\sin Sl - \sin SL = -\varepsilon \sin \alpha \cos s \cos (t - z);$$

Soit

Soit la latitude $SL = l$, & celle après un ſiecle $Sl = l + dl$, & on aura : $dl \cos l = -\varepsilon \sin \alpha \cos s \cos (t - \varpi)$.

Or, ayant $\sin l = \cos \alpha \sin s - \sin \alpha \cos s \sin (t - \varpi)$, il faut remarquer que l'angle α eſt toujours très petit, en ſorte qu'on puiſſe ſuppoſer $\cos \alpha = 1$, & $\sin \alpha = 0$, d'où l'on obtient $\sin l = \sin s$, & $\cos l = \cos s$. Par conſéquent l'accroiſſement ſeculaire de la latitude ſera aſſés à peu près : $dl = -\varepsilon \sin \alpha \cos (t - \varpi)$.

Cette formule a lieu pour les étoiles, dont la latitude eſt boreale ; or pour les méridionales il faut changer le ſigne. Ou bien on pourra ainſi énoncer cette concluſion, que la diſtance des étoiles fixes au pole boreal de l'ecliptique eſt augmentée pendant un ſiecle de la particule $= \varepsilon \sin \alpha \cos (t - \varpi)$.

XI. La variation donc, cauſée dans la latitude des étoiles fixes par l'action d'une planete, dépend de trois élémens : 1°. du mouvement de nœuds de l'écliptique ſur l'orbite de la planete, que je ſuppoſe ici $= s$ pendant un ſiecle en arrière ; 2°. de l'inclinaiſon de l'écliptique à l'orbite de la planete, que je poſe ici $= \alpha$, où il faut remarquer que cet angle eſt fort petit ; 3°. de l'angle ou l'arc $t - \varpi$, au lieu duquel on peut prendre l'arc EL, qui exprime la longitude de l'étoile S comptée depuis le nœud aſcendant E de l'ecliptique ſur l'orbite de la planete. Car, outre que la différence entre les arcs ET & EL eſt fort petite, ce que j'ai déjà négligé dans le calcul, ayant pris $\sin \alpha = 0$ & $\cos \alpha = 1$, change préciſément l'arc ET en EL. Pour nous en aſſurer, on n'a qu'à conſidérer le point O, où la ſituation préſente de l'ecliptique eſt coupée par celle, eO, qu'elle aura après un ſiecle : & puiſque nous avons dans le triangle ſphérique EOe l'angle $BEO = \alpha$, l'angle $EeO = \alpha$, & le coté $Ee = \varepsilon$, nous en tirerons :

$$\cos EOe = \cos \varepsilon . \sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1 - \sin \alpha^2 (1 - \cos \varepsilon)$$

Or l'angle EOe étant extrêmement petit, ſon coſinus ſera $= \sqrt{(1 - \sin EOe^2)} = 1 - \frac{1}{2} \sin EOe^2$, donc $\sin EOe^2 = 2 \sin \alpha^2 (1 - \cos \varepsilon) = \varepsilon \varepsilon \sin \alpha^2$ à cauſe de $\cos \varepsilon = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon$, puiſque l'arc ε eſt ſup-

posé aussi fort petit. De là nous aurons sin EOe = ε sinα, & partant : sin EOe : sin Ee = sin α : sin EO ou sin EO = 1. de sorte que l'arc EO est de 90°. Donc, si nous nommons la longitude de l'étoile depuis le nœud E ou l'arc EL = L, nous aurons OL = 90° — L, & dans le triangle L O λ la particule L λ = sin EOe. sin OL = ε sinα cosL, laquelle exprime la diminution seculaire de la latitude. Cette diminution est donc proportionnelle au cosinus de la longitude EL = L comptée depuis le nœud E suivant l'ordre des signes ; elle sera donc la plus grande lorsque L = 0, où elle devient = ε sinα ; elle évanouïra lorsque L = 90°, ensuite elle sera négative, si L surpasse 90°, jusqu'à L = 270°, entre lesquels termes elle deviendra encore la plus grande négative, lorsque L = 180° : or depuis 270°, où elle évanouït encore, elle redevient positive.

XII. Si nous concevons une étoile dans le pole de l'équateur, sa latitude sera assujettie à une semblable variation ; ou bien la distance de ce pole à l'écliptique sera variable, & partant aussi son complément, qui est égal à l'obliquité de l'écliptique. Donc, pour trouver le changement seculaire de l'obliquité de l'écliptique, on n'a qu'à chercher la longitude du pole de l'équateur comptée depuis le nœud ascendant E de l'écliptique sur l'orbite de la planete. Or ce nœud ascendant est le même que le nœud descendant de l'orbite de la planete sur l'écliptique, & la longitude du pole de l'équateur tombe dans le solstice d'été, au commencement du signe 69. Qu'on soutraye donc la longitude du nœud descendant de l'orbite de la planete, qu'on trouve marquée dans les tables Astronomiques, de 3^s, $0°$, $0'$; & nommant l'arc restant = L, la distance du pole à l'écliptique diminuera pendant l'espace d'un siecle de la quantité ε sinα cosL, ou bien l'obliquité de l'écliptique sera augmentée de la même quantité. Par ce moyen on trouvera la variation de l'obliquité de l'écliptique pour un siecle assez exactement ; mais, si l'on veut passer à plusieurs siecles à cause de la précession des équinoxes, il sera bon de chercher pour chaque siecle la longitude du nœud descendant de l'orbite de la planete par les tables, & de la soutrai-

traire de 3', 0°, 0', pour avoir l'arc L. Cette précaution n'eſt pas néceſſaire par rapport à la latitude des étoiles fixes ; car, puisque le mouvement des nœuds eſt fort lent par rapport aux étoiles fixes, ſi l'on ſoutrait la longitude du nœud E de la longitude de quelque étoile, la différence ne variera pas ſenſiblement pour pluſieurs ſiecles : & on verra bientôt par l'application de notre calcul, qu'une erreur de 10° dans cette différence n'eſt d'aucune conſéquence, ou qu'elle produit à peine une ſeconde de variation dans l'eſpace de 100 ans.

XIII. L'action d'une planete influe donc ſur la latitude des étoiles fixes, & ſur l'obliquité de l'écliptique, entant qu'elle fait reculer les nœuds de l'ecliptique ſur le plan de ſon orbite, l'angle de l'inclinaiſon demeurant le même. Un tel effet ſera produit par l'action de chaque planete, & pour le trouver il faut déterminer les élémens ſuivans :

1. *La longitude du nœud deſcendant de l'orbite de la planete ſur l'écliptique, que les Tables aſtronomiques marquent pour tous les tems donnés : & laquelle eſt la même, que la longitude du nœud aſcendant de l'ecliptique ſur l'orbite de la planete. Soit donc cette longitude* = Ω.
2. *L'inclinaiſon de l'orbite de la planete à l'écliptique, qu'on trouve auſſi indiquée dans les tables Aſtronomiques. Soit donc cette inclinaiſon* = α.
3. *L'eſpace, par lequel les nœuds de l'écliptique reculent ſur le plan de l'orbite de la planete dans un tems donné, par exemple, dans un ſiècle. Soit cet eſpace* = ε, *qu'il faut déterminer par la Théorie.*

Après avoir déterminé ces trois élémens pour chaque planete, on en trouvera les changemens ſéculaires, tant de l'obliquité de l'ecliptique, que de la latitude de chaque étoile fixe, à l'aide des régles ſuivantes :

I. Régle pour trouver le changement ſéculaire dans l'obliquité de l'écliptique.

On n'a qu'à calculer la valeur de cette formule $\varepsilon \sin \alpha \cos(90° - \Omega) = \varepsilon \sin \alpha \sin \Omega$, qui marquera l'augmentation de l'obliquité de l'écliptique pendant le cours d'un ſiecle, ſi elle eſt poſitive, & ſa diminution, ſi elle eſt negative

II. Règle pour trouver le changement ſéculaire dans la latitude des étoiles fixes.

Soit λ la longitude de l'étoile propoſée, & la valeur de cette formule $\varepsilon \sin \alpha \cos(\lambda - \Omega)$ marquera l'accroiſſement de la diſtance de l'étoile propoſée au pole boreal de l'écliptique pendant le cours d'un ſiecle. La latitude ſera donc diminuée de la même quantité, ſi elle eſt boreale; mais, ſi la latitude eſt méridionale, la même formule donnera ſon augmentation pendant un ſiecle.

XIV. J'ai déjà remarqué, que l'angle $\lambda - \Omega$ ne change pas ſenſiblement pendant l'eſpace de pluſieurs ſiecles; car la préceſſion des équinoxes affecte également les deux angles λ & Ω, & le changement de leur différence $\lambda - \Omega$ ne provient que du mouvement régreſſif du nœud Ω par rapport aux étoiles fixes, qui pendant un ſiecle ne ſurpaſſe jamais $1°$. Par cette raiſon le changement trouvé pour un ſiecle aura lieu pour pluſieurs autres ſiecles tant précedens que ſuivans. Mais il n'en eſt pas de même de l'obliquité de l'écliptique, dont le changement dépend de l'arc Ω, qui à cauſe de la préceſſion des équinoxes croit tous les ans de $50''$, & dans un ſiecle de $1°$, $23'$, de ſorte qu'en retranchant la régreſſion qui lui eſt propre, il en reſte encore plus que $1°$, $23'$, d'où après pluſieurs ſiecles peut réſulter un changement aſſés conſidérable. Dans cette recherche il faudra donc, au moins après quelques ſiecles, déterminer de nouveau par la même régle le changement ſeculaire de l'obliquité de l'ecliptique, ce qui n'eſt pas ſi néceſſaire pour la latitude des étoiles fixes. Cependant, ayant ſuppoſé ici, que l'inclinaiſon de l'écliptique à l'orbite de chaque planete demeure toujours la même, ce qui ſeroit bien vray, s'il n'y avoit qu'une planete, qui agit ſur la terre; il faut remarquer, que puiſque toutes les planetes agiſſent les unes ſur les autres, & que le plan de l'orbite de cha-

chacune eſt altéré à l'égard des plans des orbites de toutes les autres, leurs inclinaiſons mutuelles en ſeront néceſſairement changées. D'où il s'enſuit qu'avant pluſieurs ſiecles l'inclinaiſon de l'orbite de chaque planete à l'écliptique peut avoir été bien différente de celle qu'on obſerve aujourdhui ; ce qui doit produire pour ces tems-là un changement aſſés différent dans la variation ſeculaire de l'obliquité de l'écliptique & de la latitude des étoiles : or cet article demande des recherches trop profondes de la Théorie, qui meritent un attachement tout particulier.

XV. Or il s'enſuit de là encore une autre inégalité dans la longitude des étoiles fixes, dont il ne paroit pas, que les Aſtronomes ſe ſoient apperçus. On croit communément que la longitude des étoiles n'eſt aſſujettie à aucune autre variation, qu'à celle qui provient de la préceſſion des équinoxes, laquelle affectant egalement toutes les étoiles, les différences entre leurs longitudes devroient être invariables. Mais le changement du plan de l'écliptique, que je viens d'expliquer, doit néceſſairement cauſer un changement dans la différence des longitudes des étoiles, lequel après un aſſés longtems peut devenir aſſés conſiderable. Pour comprendre cela plus diſtinctement, on n'a qu'à conſidérer, que le pole de l'écliptique Π décrit actuellement dans le Ciel un petit cercle QΠR autour du pole Z de l'orbite de la planete, dont nous examinons l'action ſur la terre, & que le rayon de ce petit cercle eſt égal au ſinus de l'inclinaiſon de l'écliptique à l'orbite de cette planete, ou bien à ſin α, l'arc ZΠ étant $= \alpha$. Le pole de l'écliptique Π reculera donc pendant le cours de chaque ſiecle ſur ce petit cercle par un arc $\Pi\pi = \varepsilon$, & pendant un tems ſuffiſant il achevera une révolution entiere, ce qui doit arriver dans l'eſpace de $\frac{360^\circ}{\varepsilon}$ ſiecles. Concevons maintenant deux étoiles fixes, l'une ſituée en Z, ou dans un autre point quelconque de l'arc QR, & l'autre en P ; & il eſt clair, que lorſque le pole de l'écliptique fut en R, la longitude de ces deux étoiles aura été la même. Mais, quand le pole de l'écliptique Fig. 3.

tique aura été transporté en Q après $\frac{180°}{\epsilon}$ ſiecles, alors ces deux étoiles ſe trouveront éloignées en longitude de 180°, & pendant ce tems la différence entre leurs longitudes aura ſubi tous les changemens poſſibles entre 0° & 180°. Pour les étoiles ſituées hors le petit cercle QΠR, leur différence en longitude ne ſauroit varier tant, mais elle ſera toujours variable. Qu'on conçoive deux étoiles en P & A, ſituées dans le même grand cercle, qui paſſe par Z, & il eſt évident que, lorsque le pole de l'écliptique eſt en R ou Q, leur longitude ſera la même; mais, quand ce pole ſe trouve en Π, la différence entre leur longitude ſera exprimée par l'angle PΠA, dont la variabilité peut devenir aſſés conſiderable.

XVI. Il ſera donc important de voir, à quel point peut monter cette différence de longitude pour deux étoiles quelconques. Pour cet effet je regarde le pole Z de l'orbite de la planete comme fixe, & ſoient propoſées deux étoiles P & S, dont les diſtances au point Z ſoient: $ZP = f$; $ZS = g$; & l'angle $PZS = k$, qui ſont des quantités invariables. Soit enſuite l'angle variable $QZ\Pi = z$, qui diminue pendant chaque ſiecle de ϵ, & la diſtance conſtante $Z\Pi = \alpha$. Cela poſé, le triangle ſphérique ZΠP, à cauſe des données: $ZP = f$; $Z\Pi = \alpha$; & $PZ\Pi = z$

fournit $\text{tang } Z\Pi P = \frac{\text{ſin } z \text{ tang } f}{\text{ſin } \alpha - \text{coſ } \alpha \text{ coſ } z \text{ tang } f}$,

& le triangle ſphérique ZΠS, à cauſe des données:

$ZS = g$; $Z\Pi = \alpha$; & $SZ\Pi = k - z$

fournit $\text{tang } Z\Pi S = \frac{\text{ſin } (k-z) \text{ tang } g}{\text{ſin } \alpha - \text{coſ } \alpha \text{ coſ } (k-z) \text{ tang } g}$.

D'où l'on tire pour la différence en longitude de ces deux étoiles:

tang

$$\text{tang PΠS} = \frac{\text{cos}\alpha\,\text{tang}f\,\text{sin}\,k - \text{sin}\alpha\,\text{tang}f\,\text{sin}\,z - \text{sin}\alpha\,\text{tang}\,g\,\text{sin}\,(k-z)}{\text{sin}\alpha^2 - \text{sin}\alpha\,\text{cos}\alpha\,\text{tang}\,g\,(k-z) + \text{cos}\alpha^2\,\text{tang}f\,\text{tang}\,g\,\text{cos}\,k}$$
$$- \text{sin}\alpha\,\text{cos}\alpha\,\text{tang}f\,\text{cos}\,z \quad - \text{sin}\alpha^2\,\text{tg}f\,\text{tg}\,g\,\text{sn}\,z\,\text{sn}\,(k-z)$$

laquelle change visiblement pendant une révolution du pole de l'écliptique autour du point fixe Z. Si l'on cherche les cas, où la différence en longitude devient, ou la plus grande, ou la plus petite, on parvient à cette équation :

$$\begin{aligned}
0 = {} & + \text{cos}\alpha^2\,\text{tang}f\,\text{tang}g^2\,\text{cos}\,z \quad + \text{sin}\alpha\,\text{cos}\alpha\,\text{tang}f^2 \\
& - \text{cos}\alpha^2\,\text{tang}f^2\,\text{tang}g\,\text{cs}(k-z) - \text{sin}\alpha\,\text{cos}\alpha\,\text{tang}g^2 \\
& \qquad + \text{sn}\alpha\,\text{cos}\alpha\,\text{tg}f^2\,\text{tg}g^2\,\text{sn}\,k\,\text{cs}\,z\,\text{sn}(k-z) \\
& \qquad - \text{sn}\alpha\,\text{cos}\alpha\,\text{tg}f^2\,\text{tg}g^2\,\text{sn}\,k\,\text{sn}\,z\,\text{cs}(k-z) \\
& + \text{sin}\alpha^2\,\text{tang}g\,\text{cos}(k-z) + \text{sin}\alpha^2\,\text{tang}f^2\,\text{tg}g\,\text{sin}\,z^2\,\text{cos}(k-z) \\
& - \text{sin}\alpha^2\,\text{tang}f\,\text{cos}\,z \quad - \text{sin}\alpha^2\,\text{tang}f\,\text{tg}\,g^2\,\text{cos}\,z\,\text{sin}\,(k-z)^2
\end{aligned}$$

dont les racines z montrent les lieux Π du pole de l'écliptique, qui donnent la difference en longitude, ou la plus grande, ou la plus petite.

XVII. Mais la solution de cette équation étant trop embarrassante, il convient de recourir à des approximations, qu'on peut tirer de cette circonstance, que l'arc α est extrêmement petit. On pourra donc mettre $\text{cos}\,\alpha = 1$, & négliger dans le dénominateur les termes affectés par $\text{sin}\,\alpha^2$, d'où nous tirons :

$$\text{tang PΠS} = \frac{\text{tang}f\,\text{rang}\,g\,\text{sin}\,k - \text{sin}\,\alpha\,[\text{tang}f\,\text{sin}\,z + \text{tang}\,g\,\text{sin}\,(k-z)]}{\text{rang}f\,\text{rang}\,g\,\text{cos}\,k - \text{sin}\,\alpha\,[\text{tang}f\,\text{cos}\,z + \text{tang}\,g\,\text{cos}(k-z)]}$$

& partant encore très à peu près :

$$\text{tang PΠS} = \text{tang}\,k + \frac{\text{sin}\,\alpha\,[\text{tang}f\,\text{sin}\,(k-z) + \text{tang}\,g\,\text{sin}\,z]}{\text{tang}f\,\text{tang}\,g\,\text{cos}\,k^2}.$$

Cette

Cette différence en longitude étant renduë un *maximum*, ou *minimum*, donne :

$$\text{tang}\, g \,\text{cof}\, z = \text{tang}\, f \,\text{cof}(k-z) = \text{tang}\, f\,(\text{cof}\, k \,\text{cof}\, z + \text{fin}\, k \,\text{fin}\, z),$$

d'où nous trouvons pour les lieux cherchés Π du pole de l'écliptique

$$\text{tang}\, z = \frac{\text{tang}\, g - \text{tang}\, f \,\text{cof}\, k}{\text{tang}\, f \,\text{fin}\, k}, \quad \& \quad \text{tang}\,(k-z) = \frac{\text{tang}\, f - \text{tang}\, g \,\text{cof}\, k}{\text{tang}\, g \,\text{fin}\, k}.$$

Or, comme il y a toûjours deux angles, qui répondent à la même tangente, leur différence étant $180°$, l'un ſera pour le plus grand, & l'autre pour plus petit. Pour mieux connoitre cette diſtinction, ſubſtituons ces valeurs dans l'expreſſion de tang $P\Pi S$, & puisque

$$\text{fin}\, z = \frac{\text{tang}\, g - \text{tang}\, f \,\text{cof}\, k}{\sqrt{(\text{tang}\, f^2 + \text{tang}\, g^2 - 2\,\text{tang}\, f \,\text{tang}\, g \,\text{cof}\, k)}};$$

$$\text{fin}\,(k-z) = \frac{\text{tang}\, f - \text{tang}\, g \,\text{cof}\, k}{\sqrt{(\text{tang}\, f^2 + \text{tang}\, g^2 - 2\,\text{tang}\, f \,\text{tang}\, g \,\text{cof}\, k)}};$$

nous aurons :

$$\text{tang}\, P\Pi S = \text{tg}\, k + \frac{\text{fin}\, \alpha}{\text{tg}\, f \,\text{tg}\, g \,\text{cof}\, k^2}\sqrt{(\text{tang}\, f^2 + \text{tg}\, g^2 - 2\,\text{tg}\, f \,\text{tg}\, g \,\text{cof}\, k)}$$

par conſéquent :

$$P\Pi S = k + \frac{\alpha}{\text{tang}\, f \,\text{tang}\, g}\sqrt{(\text{tang}\, f^2 + \text{tang}\, g^2 - 2\,\text{tang}\, f \,\text{tang}\, g \,\text{cof}\, k)},$$

ou bien à cauſe de $\text{cof}\, z = \frac{\text{tang}\, f \,\text{fin}\, k}{\sqrt{(\text{tang}\, f^2 + \text{tang}\, g^2 - 2\,\text{tang}\, f \,\text{tang}\, g \,\text{cof}\, k)}}$

$$P\Pi S = k + \frac{\alpha \,\text{fin}\, k}{\text{tang}\, g \,\text{cof}\, z}.$$

Or des deux angles trouvés pour z, l'un a ſon coſinus poſitif, l'autre négatif ; donc celui-là donne l'angle $P\Pi S$ le plus grand, & celui-cy le plus petit.

XVIII.

XVIII. En quelque poſition que le pole de l'ecliptique Π ſe trouve, on peut auſſi exprimer l'angle $P\Pi S$, ou la différence en longitude des deux étoiles, en ſorte

$$P\Pi S = k + \sin \alpha \left(\frac{\sin (k-z)}{\text{tang } g} + \frac{\sin z}{\text{tang } f} \right)$$

d'où l'on trouvera aiſément, de combien la différence en longitude ſera changée pendant le cours d'un ſiecle; car, puiſque dans ce tems l'angle z diminuë de ε, la différence en longitude des deux étoiles propoſées croitra dans un ſiecle de cette particule :

$$\varepsilon \sin \alpha \left(\frac{\cos (k-z)}{\text{tang } g} - \frac{\cos z}{\text{tang } f} \right)$$

où l'on peut prendre pour f & g les diſtances des étoiles au pole de l'écliptique, pourvu qu'elles n'en ſoient pas fort proches. On voit de là d'abord que, lorsque les deux étoiles ſe trouvent près de l'écliptique, le changement dans leur différence de longitude évanouït ; parce que les tangentes des diſtances f & g deviennent alors extrèmement grandes, de ſorte que la différence entre leurs longitudes eſt conſtamment $P\Pi S = k$. Mais plus les étoiles approchent de l'un des poles de l'écliptique, plus auſſi deviendra grand le changement dans la différence en longitude. Conſidérons un cas, qui ſemble fort remarquable : Soient les deux étoiles P & S dans le même grand cercle $Z\Pi G$, de part & d'autre également éloignées de l'écliptique, & poſons leur latitude commune $= l$, qui ſera boreale pour l'une, & méridionale pour l'autre. A préſent donc la longitude de ces deux étoiles ſera la même, mais après un ſiecle elles ſe trouveront différer en longitude, & à cauſe de $z = 0$, $k = 0$, & $\text{tang } g = -\text{tang } f = \cot l$, leur différence en longitude ſera alors $= 2\varepsilon \sin \alpha \text{ tang } l$. Or on verra par la ſuite, que cette différence peut bien monter à quelques minutes, quoique les étoiles ne ſoient pas fort proches des poles de l'ecliptique : il pourra donc arriver, que deux étoiles, dont la longitude eſt à préſent la même, ont différé aſſés conſiderablement en longitude avant quelques

ſiecles, ce qui eſt ſans doute un paradoxe très remarquable dans l'Aſtronomie.

XIX. L'expreſſion, que nous venons de trouver pour le changement ſeculaire de la différence de longitude entre deux étoiles, qui eſt $= \varepsilon \sin \alpha \left(\frac{\cos (k - z)}{\operatorname{tang} g} - \frac{\cos z}{\operatorname{tang} f} \right)$, nous fait voir, que la premiere partie $\frac{\cos (k-z)}{\operatorname{tang} g}$ répond uniquement à l'étoile S, & l'autre $\frac{\cos z}{\operatorname{tang} f}$ à l'étoile P; & partant chacune priſe ſéparément nous montre, combien la longitude de chaque étoile change pendant un ſiecle, outre le changement connu, cauſé par la préceſſion des équinoxes & la nutation de l'axe de la terre. Car la longitude de l'étoile S croitra dans un ſiecle de la particule.

$$\varepsilon \sin \alpha . \frac{\cos (k - z)}{\operatorname{tang} g} = \varepsilon \sin \alpha . \frac{\cos \Pi Z S}{\operatorname{tang} Z S}$$

Pour ramener ces élémens à l'uſage de l'Aſtronomie, ſoit comme auparavant la longitude du nœud deſcendant de l'orbite de la planete ſur l'ecliptique $= \Omega$; & on ſait que la longitude du cercle Z Π G ſera $= \Omega - 90°$: ſoit de plus la longitude de l'étoile S $= \lambda$, & on aura l'angle G Π S $= \lambda - \Omega + 90°$. Soit enſuite la diſtance de l'étoile S au pole boreal de l'ecliptique ou l'arc Π S $= p$: & ayant dans le triangle ſphèrique Π Z S les cotés Z Π $= \alpha$, & Π S $= p$ avec l'angle intercepté Z Π S $= 90° - \lambda + \Omega$, on trouve :

$$\cos Z S = \sin (\lambda - \Omega) \sin \alpha \sin p + \cos \alpha \cos p$$

&

$$\operatorname{tang} \Pi Z S = \frac{\cos (\lambda - \Omega) \operatorname{tang} p}{\sin \alpha - \sin (\lambda - \Omega) \cos \alpha \operatorname{tang} p} = \frac{\cos (\lambda - \Omega) \sin p}{\sin \alpha \cos p - \cos \alpha \sin (\lambda - \Omega) \sin p}$$

d'où

d'où en ſuppoſant l'arc α extrêmement petit, on aura l'incrément en longitude de l'étoile S pour un ſiecle

$$= - \frac{\varepsilon \sin \alpha . \sin^2(\lambda - \Omega)}{\text{tang } p}.$$

laquelle formule aura toujours lieu, pourvu que l'étoile ne ſoit pas trop proche du pole de l'écliptique. Donc, ſi l'on calcule pour chaque tems propoſé la vraye longitude de chaque étoile, on verra aiſément, de combien la différence en longitude entre deux étoiles quelconques ſera changée.

XX. Voilà donc trois effets, que l'action de chaque planete produit dans les phènomenes celeſtes.

Le premier regarde l'obliquité de l'écliptique; & nous avons vû qu'elle en eſt augmentée pendant le cours d'un ſiecle de la particule $\varepsilon \sin \alpha \sin \Omega$.

Le ſecond affecte la latitude des étoiles; & nous avons vû que la diſtance d'une étoile fixe au pole boreal de l'écliptique en eſt augmentée pendant un ſiecle de la quantité $\varepsilon \sin \alpha \cos(\lambda - \Omega)$.

Le troiſième affecte la longitude des étoiles fixes, par lequel nous venons de voir, que la longitude d'une étoile fixe diminuë pendant un ſiecle de la particule $\varepsilon \sin \alpha . \frac{\sin(\lambda - \Omega)}{\text{tang } p}$; outre les changemens, que la préceſſion des équinoxes & la nutation de l'axe de la terre y produiſent.

On y peut ajouter le quatrième effet, qui conſiſte dans une irrégularité de la préceſſion des équinoxes même. Car ſi nous conſidérons une étoile dans le pole boreal de l'équateur de la terre, ſa longitude étant 90°, & ſa diſtance au pole de l'écliptique égale à l'obliquité de l'écliptique, qui ſoit $= e$, la longitude de cette étoile ſera diminuée pendant un ſiecle de la particule $\varepsilon \sin \alpha . \frac{\cos \Omega}{\text{tang } e}$, & de la même quantité les points équinoctiaux ſeront transportés en arriere outre la préceſſion ordinaire.

Pour l'intelligence de ces formules, il faut ſe ſouvenir que nous avons ſuppoſé,

La longitude du nœud deſcendant de la planete $= \Omega$.
L'inclinaiſon de ſon orbite à l'écliptique $= \alpha$.
La longitude d'une étoile propoſée $= \lambda$.
Sa diſtance au pole boreal de l'écliptique $= p$.
La régreſſion ſeculaire des nœuds de la planete $= \varepsilon$.
(par rapport aux étoiles fixes)
L'obliquité de l'écliptique $= \epsilon$.

XXI. Après ces déterminations générales, recherchons plus ſoigneuſement, quel doit être l'effet produit par l'action de chaque planete en particulier. Et d'abord il s'agit de définir l'eſpace ϵ par lequel le plan de l'écliptique recule dans un ſiecle ſur l'orbite de chaque planete ; or, comme cela dépend uniquement de la Théorie, & qu'il demande des calculs fort longs, je me contenterai d'en rapporter les réſultats. Mais il faut obſerver ici, qu'on ne connoit que les forces abſoluës des deux planetes de Saturne, & de Jupiter, par l'action qu'ils exercent ſur leurs ſatellites ; & que les forces des autres planetes nous ſont abſolument inconnues. Il eſt bien vray que dans le Syſtême de *Newton*, on eſtime les forces abſoluës des corps celeſtes par la quantité de leur matiere ; mais, puiſque celle-cy n'eſt pas proportionnelle à leur volume, on n'en peut rien conclure : il faudroit outre le volume connoitre la denſité du corps de chaque planete. Or en conſidérant la denſité de Saturne, de Jupiter, & de la Terre, comme *Newton* l'a établie, en comparant leur volume avec leur force abſoluë, en ſuppoſant la parallaxe horizontale du Soleil de $10''$, on s'apperçoit d'abord que la denſité augmente en approchant du Soleil : & quand on compare ces denſités connues avec les diſtances moyennes de ces planetes au Soleil, ou avec le tems de leurs révolutions, il ſemble qu'on en puiſſe conclure, que les denſités ſuivent la raiſon ſousdoublée des mouvemens moyens, qui répondent au même tems, ou bien la raiſon réciproque ſousdoublée de leurs tems périodiques. Si l'on ſe tient à cette régle, on pourra aſ-

ſi-

ſigner la force abſoluë de chaque planete ; & puisque le mouvement progreſſif de l'aphelie de l'orbite de la terre eſt ſans contredit cauſé par l'action des autres planetes, le calcul fondé ſur cette régle conduit effectivement à une concluſion, qui ſe trouve parfaitement d'accord avec les obſervations. Ayant donc ſatisfait au phènomene de l'aphelie de la terre, on peut être aſſeuré que les mêmes forces abſoluës nous conduiront auſſi aux phénomenes, qui réſultent de la mutabilité du plan de l'écliptique.

XXII. Or le calcul fondé ſur ces principes nous découvre, que l'interſection du plan de l'écliptique avec celui de l'orbite de Saturne doit reculer par an de $22'''$, ou de $37''$ par ſiecle; & c'eſt en quoi conſiſte l'action de Saturne. L'action de Jupiter eſt la plus grande de toutes les planetes, elle fait que l'interſection de l'écliptique avec l'orbite de cette planete recule de $6'', 57'''$ par an, & partant de $695''$ par ſiecle. Mars produit encore un moindre effet que Saturne, & ne fait reculer la ligne des nœuds que de $5'''$ par an, & $8''$ par ſiecle. Mais l'action de Venus eſt après celle de Jupiter la plus grande, puiſqu'elle fait reculer la ligne des nœuds de $5'', 20'''$ par an & partant de $533''$ par ſiecle. Enfin l'action de Mercure eſt la plus petite, & ne fait reculer la ligne des nœuds que d'une tierce par an, & d'une ſeconde environ par ſiecle. Joignons ces valeurs de ε avec les autres élémens, que les tables Aſtronomiques nous fourniſſent, & nous trouverons pour le commencement de ce ſiecle les valeurs ſuivantes :

	Long. du nœud deſcendant ou ☊	Inclinaiſon de l'orbite ou α	Régreſſion ſeculaire des nœuds ou ε
Pour Saturne	$9^s, 21^\circ, 5', 6''$	$2^\circ, 30', 10''$	$37''$
Pour Jupiter	9, 7, 34, 10	1, 19, 10	695
Pour Mars	7, 17, 24, 42	1, 51, 0	8
Pour Venus	8, 13, 57, 53	3, 23, 20	533
Pour Mercure	7, 14, 47, 20	6, 59, 20	1

De là il eſt clair qu'on peut hardiment négliger dans cette recherche l'action de Mars & de Mercure; & pour celle de Saturne, puisque les nœuds diffèrent fort peu, on la peut combiner avec l'action de Jupiter, en augmentant la valeur de ε d'environ $70''$, puisque l'inclinaiſon α pour Saturne eſt presque le double de celle de Jupiter. Et partant en rejettant auſſi Saturne, je mettrai pour l'effet de Jupiter $\varepsilon = 765''$, & pour celui de Venus $\varepsilon = 540''$, à cauſe de Mars & de Mercure.

XXIII. Nous n'aurons donc à conſidèrer que les deux planetes de Jupiter & de Venus; & puisque dans nos formules, que nous avons trouvées pour les variations dans l'obliquité de l'écliptique, dans la préceſſion des équinoxes, dans la latitude & dans la longitude des étoiles fixes, la régreſſion ſeculaire ε eſt partout multipliée par ſin α, nous aurons

Pour l'action de Jupiter

$$\varepsilon \text{ ſin } \alpha = 18'' \quad \& \quad \Omega = 9^s, 7^\circ, 34' \quad \text{A. 1700.}$$

Pour l'action de Venus

$$\varepsilon \text{ ſin } \alpha = 32'' \quad \& \quad \Omega = 8^s, 13^\circ, 58' \quad \text{A. 1700.}$$

d'où l'on voit que l'effet de Venus eſt presque deux fois plus grand que celui de Jupiter, quoique la valeur de ε, qui répond à Jupiter, ſoit plus grande que celle qui répond à Venus. La raiſon en eſt, que l'inclinaiſon de l'orbite de Venus eſt beaucoup plus grande que celle de l'orbite de Jupiter. Or j'ai déjà remarqué que l'inclinaiſon mutuelle des orbites des planetes doit auſſi varier avec le tems: & il eſt très probable que du tems d'*Hipparque* l'inclinaiſon des orbites de Jupiter & de Venus à l'écliptique a été ſenſiblement différente de celle qu'on obſerve aujourdhui; & partant pour ces tems reculés, il n'y a aucun doute que les valeurs de ε ſin α pour l'une & l'autre planete n'ayent été, ou plus grandes, ou plus petites, que je les ai marquées ici. Mais il ſera extrêmement difficile de s'aſſurer ſur cet important article par les ſeules obſervations anciennes; & il vaudroit bien la peine, qu'on apportât tous les ſoins poſſibles pour l'éclaircir par la Théorie.

Ce-

Cependant, au défaut de telles recherches, je conſidérerai ces valeurs de ε ſin α comme fixes, puiſqu'il eſt ſur, qu'elles ne ſauroient varier fort ſenſiblement, à moins que l'intervalle de tems ne ſoit extrêmement long. Sur ce pied je m'en vai développer les quatre articles mentionnés l'un après l'autre.

I.

Détermination des changemens dans l'obliquité de l'écliptique.

XXIV. Pour voir combien l'obliquité de l'écliptique ſera changée dans un ſiecle donné, il faut tirer des tables Aſtronomiques pour le commencement de ce ſiecle

La longitude du nœud deſcendant de Jupiter $= \Omega$

& La longitude du nœud deſcendant de Venus $= \Omega$.

Alors pendant le cours de ce ſiecle l'obliquité de l'écliptique ſera augmentée de tant de ſecondes :

$$18'' \text{ ſin } \Omega + 32'' \text{ ſin } \Omega.$$

Maintenant au commencement du ſiecle préſent ou A. 1700. il étoit :

$$\Omega = 9^s, 7^\circ, 34' \quad \& \quad \Omega = 8^s, 13^\circ, 58'.$$

les ſinus de ces arcs étant donc négatifs, l'obliquité de l'écliptique va en diminuant, & la diminution ſeculaire vaudra

$$18'' \text{ ſin } 82^\circ, 26' + 32'' \text{ ſin } 73^\circ, 58' = 47\tfrac{1}{2}''.$$

On eſtime à preſent l'obliquité moyenne de l'écliptique de $23^\circ, 28', 30''$ qu'on peut regarder comme la juſte valeur pour l'année 1730. environ; d'où l'on peut conclure, que l'obliquité moyenne de l'écliptique

a été A. 1700 $= 23^\circ, 28', 43''$
A. 1750 $= 23^\circ, 28', 19''$
& ſera A. 1800 $= 23^\circ, 27', 55''$.

Il faut bien conſidérer que je parle ici de l'obliquité moyenne de l'écliptique, en faiſant abſtraction des inégalités, qui y ſont cauſées par la nutation

tion de l'axe de la terre, & qui ſont ſuffiſamment conſtatées. Cependant la connoiſſance de cette même diminution ſeculaire ne contribuera pas peu à mieux établir l'obliquité moyenne pour un tems donné, puisque jusqu'ici on n'a pas ſoupçonné, que le tems y doive entrer en compte.

XXV. Pour les ſiecles à venir, les arcs ♃ & ♀ croiſſant, l'effet de Venus deviendra plus grand, mais celui de Jupiter plus petit, ſans pourtant que la diminution ſeculaire change ſenſiblement. Ainſi on peut compter que pour chaque ſiecle à venir, pourvu qu'on n'aille point trop loin, l'obliquité de l'écliptique diminuë pendant le cours de chaque ſiecle de $47\frac{1}{2}$ ſecondes. Il en eſt de même pour les ſiecles paſſés, où nous pourrons compter $47\frac{1}{2}$ ſecondes d'augmentation pour chacun en arrière: cependant il ne faut pas remonter trop haut. Cherchons par exemple la diminution de l'obliquité de l'écliptique depuis l'an 1000 à 1100, & puiſque les tables Aſtronomiques nous donnent pour l'année

1000 $\quad ♃ = 8^{s}, 27^{\circ}, 52'$ & $♀ = 8^{s}, 7^{\circ}, 57'$

la diminution pour ce ſiecle a été

$$= 18'' \text{ ſin } 87^{\circ}, 52' + 32'' \text{ ſin } 67^{\circ}, 57' = 47\tfrac{2}{3}''$$

qui ne différe pas encore ſenſiblement de la préſente. Mais ſi nous conſidérons le ſiecle depuis l'an 0 à l'an 100, ayant pour l'an 0

$$♃ = 8^{s}, 13^{\circ}, 58' \quad \& \quad ♀ = 7^{s}, 19^{\circ}, 20'$$

la diminution ſeculaire aura été alors

$$= 18'' \text{ ſin } 37^{\circ}, 58 + 32'' \text{ ſin } 49^{\circ}, 20' = 41\tfrac{1}{2}'',$$

qui eſt déjà de $6''$ moindre qu'à preſent, & plus nous remontons au delà, plus auſſi trouverons-nous cette diminution petite. Mais, puiſqu'on ſuppoſe très gratuitement, que l'inclinaiſon des orbites de ces deux planetes étoit alors la même qu'aujourdhui, on ne peut pas ſe fier ſur cette détermination, & il pourroit bien arriver, que la diminution ſeculaire fût alors encore plus grande qu'aujourdhui. Car quand l'inclinaiſon auroit été deux fois plus grande qu'à préſent, il faudroit doubler les nombres 18 & 32, & alors on obtiendroit $83''$ pour la diminution depuis A. 0 jus-

jusqu'à A. 100. Il n'eſt cependant pas probable, que le changement dans l'inclinaiſon ait été ſi grand; mais il eſt toujours fort incertain de déterminer par cette methode l'obliquité de l'écliptique pour les ſiecles trop reculés.

XXVI. En cas que l'inclinaiſon des orbites des planetes à l'écliptique n'ait pas changé ſenſiblement depuis le commencement de notre époque, nous pourrions conclure, que l'obliquité de l'écliptique eut changé de 50 en 50 ans, comme la Table ſuivante indique.

A.C.	Obliquité de l'ecliptique.	A.C.	Obliquité de l'ecliptique.
0	23, 41, 38	1000	23°, 34′, 15″
50	23, 41, 18	1050	23, 33, 51
100	23, 40, 57	1100	23, 33, 27
150	23, 40, 36	1150	23, 33, 4
200	23, 40, 15	1200	23, 32, 40
250	23, 39, 54	1250	23, 32, 16
300	23, 39, 33	1300	23, 31, 52
350	23, 39, 12	1350	23, 31, 28
400	23, 38, 50	1400	23, 31, 5
450	23, 38, 28	1450	23, 30, 41
500	23, 38, 6	1500	23, 30, 17
550	23, 37, 43	1550	23, 29, 54
600	23, 37, 21	1600	23, 29, 30
650	23, 36, 58	1650	23, 29, 6
700	23, 36, 35	1700	23, 28, 43
750	23, 36, 12	1750	23, 28, 19
800	23, 35, 49	1800	23, 27, 55
850	23, 35, 26	1850	23, 27, 32
900	23, 35, 2	1900	23, 27, 8
950	23, 34, 38	1950	23, 26, 44
1000	23, 34, 15	2000	23, 26, 21

Selon cette table on auroit pour le tems de *Pytheas* l'obliquité de l'écliptique 23°, 43′, 40″, & partant de 9′ plus petite, qu'il ne l'avoit marquée : donc, en cas qu'une différence de 9′ ne puiſſe être attribuée aux obſervations, il faut conclure que l'inclinaiſon de l'écliptique aux orbites de Jupiter & de Venus ait été autrefois plus grande qu'aujourdhui. Mais cette Table convient aſſés avec les obſervations d'*Albategnius*, & de ceux qui l'ont ſuivi.

XXVII. M. *Caſſini*, dans ſes Elémens d'Aſtronomie, aſſure que par une ſuite des obſervations faites pendant l'eſpace de 66 ans on avoit remarqué, que l'obliquité de l'écliptique avoit diminué dans ce tems de 30″, ce qui s'accorde fort bien avec notre Théorie, qui donne pour un ſiecle 47½ ſecondes de diminution. Il obſerve auſſi que *Copernic*, dans ſa détermination de l'obliquité de l'écliptique, qu'il ne trouva que de 23°, 28′, avoit négligé la réfraction, par le moyen de laquelle il l'auroit trouvée de 2′ plus grande, ce qui s'accorde encore fort bien avec la Théorie : & ce qu'il remarque ſur les obſervations des derniers ſiecles prouve encore admirablement notre Théorie, quoique M. *Caſſini* lui-même n'ait pas oſé contredire ouvertement le ſentiment de ceux qui ſoutiennent l'obliquité de l'écliptique invariable. Cependant il faut remarquer que depuis quelques ſiecles la diminution de l'obliquité a été la plus grande, & qu'elle deviendra de plus en plus petite, jusqu'à ce qu'après un très grand nombre de ſiecles elle évanouïra entièrement, & deviendra enſuite négative. Après ce tems là elle croitra de nouveau pendant un très long tems, jusqu'à ce qu'elle aura atteint ſa plus grande quantité : mais on ne ſauroit rien déterminer, ni ſur ce tems, ni ſur la plus grande & plus petite quantité : tant parce que le mouvement des nœuds des planetes n'eſt pas aſſés exactement connu, que parce qu'on ignore encore tout à fait les changemens, auxquels l'inclinaiſon des orbites des planetes à l'écliptique eſt aſſujettie : ce qui eſt pourtant ce de quoi la variation dans l'obliquité de l'écliptique dépend principalement. Puisqu'à préſent cette variation eſt à peu près la plus grande, on en peut conclure, que l'obliquité ſe trou-

ve

ve à ſa grandeur moyenne, & qu'elle deviendra encore d'autant plus petite, qu'elle a été autrefois plus grande. Si ce n'étoit qu'une ſeule planete, qui cauſât cette variation, la différence entre la plus grande & plus petite obliquité ſeroit égale à la double inclinaiſon de l'orbite de cette planete ; mais, puiſqu'elle dépend de deux planetes, on n'en peut pas tirer une ſemblable concluſion : cependant le changement total ne ſauroit jamais monter à 9°, ce qui eſt le double de la ſomme des inclinaiſons des orbites de Jupiter & de Venus.

II.

Détermination des changemens dans la préceſſion des Equinoxes.

XXVIII. Quand M. *d'Alembert* détermina le premier la préceſſion des équinoxes, & les inégalités qui y ſont cauſées par l'action de la Lune, il regarda comme fixe le plan de l'écliptique. Or ayant prouvé à préſent que ce plan eſt mobile, on comprend aiſément, que cette mobilité doit auſſi cauſer quelque altération dans la préceſſion des équinoxes ; où j'obſerve en paſſant que le mouvement même de l'axe de la Terre, entant qu'il dépend de l'obliquité de l'écliptique, a été autrefois un peu différent de celui qu'on a déterminé par la Théorie pour le ſiecle d'à préſent. Mais je ſuppoſe ici comme parfaitement connuë la préceſſion des équinoxes avec ſes irrégularités, qui ſont cauſées par l'action de la Lune ; & je recherche uniquement les changemens, qui y doivent arriver à cauſe de l'action de Jupiter & de Venus. Or ayant aſſigné les valeurs de la formule $\varepsilon \sin \alpha$ pour ces deux planetes, leur action fera reculer la longitude du pole de l'équateur, & partant auſſi les points équinoctiaux pendant un ſiecle par l'eſpace $\frac{18'' \cos \mathfrak{U} + 32'' \cos \mathfrak{P}}{\text{tang } e}$,

où e marque l'obliquité de l'écliptique pour ce tems. Donc pour le ſiecle d'à preſent, où

$\mathfrak{U} = 9^s, 7°, 34'$; $\mathfrak{P} = 8^s, 13°, 58'$ & $e = 23°, 28', 30''$,

les points équinoctiaux reculeront pendant ce ſiecle par l'eſpace de :

$$\frac{18''\ \text{cof}\ 82°, 26' \ -\!\!-\ 32''\ \text{cof}\ 73°, 58'}{\text{tang}\ 23°, 28', 30''} = -14'',$$

donc les points équinoctiaux avanceront pendant ce ſiecle de $14''$. Donc, ſi le mouvement moyen, qui leur eſt imprimé par l'action de la Lune eſt de $5030''$, ou de $1°, 23', 50''$ pour un ſiecle, il ſera effectivement de $14''$ moindre, & partant de $1°, 23', 36''$, à cauſe de l'action des planetes. Mais, puisque cette accéleration n'eſt que de $8\frac{2}{3}$ tierces par an, elle évanouït presque par rapport à la préceſſion moyenne, qu'on eſtime de $50'', 18'''$ par an.

XXIX. Puisque les longitudes ☊ & ☿ vont en croiſſant, il eſt évident, que pour les ſiecles ſuivans cet effet des planetes deviendra de plus en plus petit, & qu'après être évanouï, il changera de ſigne. Mais pour les ſiecles paſſés il a été plus grand par la même raiſon, & puisqu'il eſt négatif, la préceſſion ordinaire des équinoxes en a été diminuée. Conſidérons le ſiecle depuis A. 1000. à A. 1100 ; & les points équinoctiaux auront été reculés pendant ce ſiecle de

$$-\frac{18\ \text{cof}\ 87°, 52' \ -\!\!-\ 32\ \text{cof}\ 67°, 57'}{\text{tang}\ 23°, 34', 15''} = -29'',$$

& partant la préceſſion moyenne des équinoxes aura été

$$1°, 23', 50'' \ -\!\!-\ 29'' = 1°, 23', 21''.$$

Faiſons auſſi le calcul du ſiecle depuis A. 0 à A. 100. & nous trouverons

$$-\frac{18\ \text{cof}\ 73°, 58' \ -\!\!-\ 32\ \text{cof}\ 49°, 20'}{\text{tang}\ 23°, 40'\ 38''} = -59'',$$

& partant dans ce ſiecle la préceſſion moyenne des équinoxes aura été

$$1°, 23', 50'' \ -\!\!-\ 59'' = 1°, 22', 51''.$$

De là nous pourrons dreſſer la table ſuivante, qui repréſente la longitude moyenne de la première étoile d'*Aries* pour le commencement de chaque ſiecle, indépendament des inégalités particulieres, auxquelles la longitude de cette étoile eſt aſſujettie.

Lon-

Longitude moyenne de la 1re * de ♈.

A. 0	0s,	5°,	24′,	23″	A.1000	0s,	19°,	15′,	8″
		1	22	51			1	23	21
A. 100	0,	6,	47,	14	A.1100	0,	20,	38,	29
		1	22	54			1	23	23
A. 200	0,	8,	10,	8	A.1200	0,	22,	1,	52
		1	22	57			1	23	26
A. 300	0,	9,	33,	5	A.1300	0,	23,	25,	17
		1	23	0			1	23	27
A. 400	0,	10,	56,	5	A.1400	0,	24,	48,	44
		1	23	3			1	23	30
A. 500	0,	12,	19,	8	A.1500	0,	26,	12,	14
		1	23	6			1	23	32
A. 600	0,	13,	42,	14	A.1600	0,	27,	35,	46
		1	23	9			1	23	34
A. 700	0,	15,	5,	23	A.1700	0,	28,	59,	20
		1	23	12			1	23	36
A. 800	0,	16,	28,	35	A.1800	1,	0,	22,	56
		1	23	15			1	23	40
A. 900	0,	17,	51,	50	A.1900	1,	1,	46,	36
		1	23	18			1	23	45
A.1000	0,	19,	15,	8	A.2000	1,	3,	10,	21

Où j'ai ſuppoſé la préceſſion annuelle ordinaire de 1°, 23′, 50″ : ſi elle étoit ou plus grande, ou plus petite, on en corrigeroit aiſément cette Table.

30. Après avoir bien déterminé la partie de la préceſſion des équinoxes, qui dépend de l'action des planetes, on eſt en état d'aſſigner plus exactement celle, qui eſt cauſée par l'action de la Lune ſur l'axe de la Terre. Car, ſi l'on connoiſſoit avec toute la préciſion poſſipoſſible, de combien la premiere étoile d'Aries eſt avancée en longitude dans un tems donné, puiſqu'on ſait l'effet produit par l'action des planetes, le reſte doit être attribué au mouvement de l'axe de la Terre. Mais dans cette détermination il faut prendre la longitude moyenne de cette étoile, & non pas la vraye, qui en différe à cauſe de la nutation de l'axe de la terre. Ainſi, ſi nous ſuppoſons, que par les obſervations de *Tycho* la longitude vraye de 1*♈ ait été A.1691 = 0s, 27°, 36′, 50″

puisque la longitude du nœud aſcendant de la Lune étoit alors $9^{s}, 11^{\circ}, 35'$, il en faut ſoutraire $17''$ pour avoir la longitude moyenne. Donc au commencement de l'année 1601 la longitude moyenne de la 1ère ♈

aura été $0^{s}, 27^{\circ}, 36', 33''$.

Enſuite ſelon *Flamſted* la longitude vraye de cette même étoile a été au commencement de l'année $1700 = 0^{s}, 28^{\circ}, 59', 20''$, d'où à cauſe du nœud aſcendant de la Lune $5^{s}, 16^{\circ}, 46'$, la longitude moyenne en différe de $3''$, & partant

aura été $0^{s}, 28^{\circ}, 59', 23''$.

Et partant dans l'eſpace de 99 ans cette étoile aura actuellement avancé en longitude moyenne de $1^{\circ}, 22' 50''$, & en 100 ans de $1^{\circ}, 23', 40''$. Soit maintenant z la préceſſion ſeculaire des équinoxes cauſée par le mouvement de l'axe de la terre, & puisque nous avons vu, que l'action des planetes donne pour ce ſiecle $16''$, la préceſſion entière ſera $z - 16''$, & partant $z = 1^{\circ}, 23', 56''$, qui ne ſurpaſſe que de $6''$ celle que j'ai introduite d'abord. D'où l'on voit que par la ſeule action de la Lune, ou par le mouvement de l'axe de la terre, la préceſſion moyenne ſeculaire des équinoxes eſt $1^{\circ}, 23',, 56''$, ou $5036''$ ce qui donne par an $50'', 21\frac{1}{2}'''$; & convient fort bien avec ce qu'on a pu conclure jusqu'ici de la Théorie de la Lune appliquée à la nutation de l'axe de la terre.

III.

Détermination des changemens dans la latitude des étoiles fixes.

XXXI. Ayant trouvé $\varepsilon \sin \alpha = 18''$ pour Jupiter, & $\varepsilon \sin \alpha = 32''$ pour Venus, ſi nous poſons

La longitude du nœud deſcendant de Jupiter = ♃.

La longitude du nœud deſcendant de Venus = ♀.

& La longitude d'une étoile fixe = λ.

nous avons vu que la diſtance de cette étoile au pole boreal de l'éclip-tique croitra pendant un ſiecle de cette particule :

$18''$

$$18'' \cos(\lambda - 24) + 32'' \cos(\lambda - ♀).$$

Donc la latitude croitra de cette même particule, ſi elle eſt boreale, mais ſi elle eſt méridionale, la latitude en ſera diminuée, ſuppoſé que la valeur de notre formule ſoit poſitive; car au cas qu'elle devienne négative, l'effet ſera contraire. J'ai déjà remarqué que la même valeur, qui convient à cette formule pour un certain ſiecle, peut avoir lieu pour pluſieurs ſiecles tant paſſés qu'à venir, parce que les arcs $\lambda - 24$ & $\lambda - ♀$ ne changent pas ſenſiblement pendant le cours de pluſieurs ſiecles. En effet les Tables de *Halley* donnent aux nœuds de Jupiter le même mouvement qu'aux étoiles fixes, de ſorte que l'arc $\lambda - 24$ demeureroit toujours exactement le même : or les Tables de *Caſſini* ne font avancer les nœuds de Jupiter que de $24''$ par an, pendant que les étoiles fixes avancent de $50''$, d'où réſulteroit enfin une grande différence dans la valeur de l'arc $\lambda - 24$. Mais pour les nœuds de Venus ces deux Aſtronomes ſont plus d'accord, *Caſſini* mettant leur mouvement annuel de $34''$, & *Halley* de $31''$, d'où l'arc $\lambda - ♀$ changeroit de $18''$ par an, & partant de $31'$ par ſiecle, ce qui ne produiroit pourtant que $10°$ pendant 20 Siecles. Or j'ai déjà obſervé, que notre formule ne ſauroit avoir lieu pour un trop grand nombre de ſiecles, à cauſe de l'incertitude où nous ſommes par rapport à l'inclinaiſon des orbites : & avec cette reſtriction nous pourrons bien regarder comme invariables les arcs $\lambda - 24$ & $\lambda - ♀$.

XXXII. Qu'on prenne donc la longitude d'une étoile pour le commencement de ce ſiecle, de ſorte que

λ marque la longitude de l'étoile A. 1700.

& puiſque pour ce même cas on a

$$24 = 9^s, 7°, 34' \quad \& \quad ♀ = 8^s, 13°, 58'$$

en dévelopant notre formule, l'augmentation ſeculaire de la diſtance de l'étoile au pole boreal de l'écliptique ſera :

$$+ 18'' \cos 24 \cos \lambda + 18'' \sin 24 \sin \lambda$$
$$+ 32'' \cos ♀ \cos \lambda + 32'' \sin ♀ \sin \lambda.$$

Or

Or nous avons trouvé cy-deſſus :

$$18'' \sin \odot + 32'' \sin ♀ = -47\tfrac{1}{2} \text{ ſecondes}$$

$$\& \quad 18'' \cos \odot + 32'' \cos ♀ = -6\tfrac{1}{2} \text{ ſecondes}$$

Donc ladite augmentation ſeculaire ſera :

$$-47\tfrac{1}{2} \sin \lambda - 6\tfrac{1}{2} \cos \lambda \text{ ſecondes.}$$

D'où l'on voit que les étoiles, dont la longitude fut A. 1700.

ou $2^s, 22°$, ou $8^s, 22°$

ſont le plus aſſujetties au changement en latitude ; car pendant le cours d'un ſiecle leur diſtance du pole de l'écliptique change de $48''$; celle des premieres, dont la longitude eſt $2^s, 22°$, en devenant plus petite, & celle des dernieres, dont la longitude eſt $8^s, 22°$, plus grande. Puiſque le même changement eſt arrivé depuis pluſieurs ſiecles, la diſtance au pole boreal de l'écliptique des étoiles dont la longitude étoit $2^s, 22°$ A. 1700. fut autrefois plus grande qu'aujourdhui, & cela d'autant de fois de $48''$, qu'il s'en eſt écoulé de ſiecles ; mais pour les étoiles dont la longitude étoit $8^s, 22^s$ A. 1700. leur diſtance au pole boreal de l'écliptique fut autrefois plus petite qu'aujourdhui, & cela d'autant de fois de $48''$ qu'il s'en eſt écoulé de ſiecles. Ce changement ſera donc de $8'$ en 10 ſiecles, & de $16'$ en 20 ſiecles ; mais les autres étoiles fixes auront ſubi de moindres changemens.

XXXIII. La formule trouvée $47\frac{1}{2} \sin \lambda + 6\frac{1}{2} \cos \lambda$ ſe transforme aiſément dans celle-cy $48 \cos (82° - \lambda)$, ou $48 \cos (\lambda - 82°)$, ou bien $48 \sin (\lambda + 8°)$. Donc, ſi la longitude d'une étoile fixe eſt $= \lambda$ pour l'année 1700, & que ſa diſtance au pole boreal de l'écliptique ait été pour un tems quelconque propoſé $= D$, un ſiecle après, ſa diſtance au même pole ſera $= D - 48'' \sin (\lambda + 8°)$; d'où j'ai calculé la Table ſuivante.

CHAN-

CHANGEMENS

dans la diſtance des étoiles fixes au pole boreal de l'ecliptique pendant un ſiècle.

Arg. La longitude de l'étoile A. 1700.

gr.	♈ dimin. ♎ augm.	♉ dimin. ♏ augm.	♊ dimin. ♐ augm.	♋ dimin. ♑ augm.	♌ dimin. ♒ augm.	♍ dimin. ♓ augm.
0	6″, 7	29″, 5	44′, 5	47″, 5	37″, 8	18″, 0
3	9, 2	31, 5	45, 4	47, 1	36, 2	15, 6
6	11, 6	33, 4	46, 1	46, 6	34, 5	13, 2
9	14, 0	35, 1	46, 8	45, 9	32, 8	10, 8
12	16, 4	36, 8	47, 3	45, 1	30, 8	8, 4
15	18, 8	38, 3	47, 6	44, 2	28, 8	5, 9
18	21, 0	39, 8	47, 9	43, 2	26, 8	3, 4
21	23, 3	41, 1	48, 0	42, 0	24, 7	0, 9
24	25, 4	42, 4	48, 0	40, 7	22, 5	1, 7
27	27, 5	43, 5	47, 8	39, 3	20, 2	4, 2
30	29, 5	44, 5	47, 5	37, 8	18, 0	6, 7

De là il eſt aiſé de conclure, combien la latitude de chaque étoile change pendant un ſiecle; car, ſi la latitude eſt boreale, on n'a qu'à changer les titres, & ſi elle eſt méridionale, les titres demeurent les mêmes.

XXXIV. Les endroits du plus grand changement ſouffrent donc une plus grande étenduë, & on peut dire que les étoiles, dont la longitude tombe ou dans la derniere moitié de ♊, ou dans la derniere de ♐ A. 1700, ſont aſſujetties au plus grand changement en latitude, qui monte à 48″ pendant un ſiecle : ce qui ſe reduit aux deux régles ſuivantes :

I. Pour les étoiles, dont la longitude tomboit A. 1700. dans la derniere moitié de ♊.

Leur latitude, ſi elle eſt boreale, augmente pendant chaque ſiecle de $48''$; or, ſi elle eſt méridionale, elle diminuë après chaque ſiecle de $48''$.

II. Pour les étoiles, dont la longitude tomboit A. 1700. dans la derniere moitié de ♑.

Leur latitude, ſi elle eſt boreale, diminuë après chaque ſiecle de $48''$, & ſi elle méridionale, elle augmente de $48''$ après chaque ſiecle.

On voit auſſi, qu'il y a deux poſitions en longitude pour A. 1700. où la latitude des étoiles ne change point du tout. Ainſi la latitude des étoiles, dont la longitude étoit A. 1700, ou ♍ 22° ou ♓ 22°, a été depuis pluſieurs ſiecles la même qu'aujourdhui, & demeurera encore la même pendant pluſieurs ſiecles.

Or les déterminations de latitudes, qu'on tire des obſervations ſont rarement ſi exactes, qu'on ne doive craindre une erreur de pluſieurs ſecondes, ſurtout quand on remonte à des tems reculés. Ainſi, en comparant nôtre table avec les obſervations, on ne doit pas être ſurpris, lorſqu'on ne rencontre point un parfait accord. Principalement il ne faut pas comparer enſemble des obſervations, à moins que l'intervalle du tems ne ſoit de quelques ſiecles. Donc, quoique les latitudes, qu'on trouve dans le Catalogue de *Ptolemée*, ſoient fort groſſièrement marquées, on pourra s'en ſervir avec un meilleur ſuccès, que des latitudes de *Tycho*, qui ſont beaucoup plus parfaites. Cependant il faudra ſe contenter, quand on voit en général que les variations dans les latitudes s'accordent à quelques minutes près avec nos principes.

XXXV. Pour voir à quel point les anciennes obſervations ſont d'accord avec la Théorie, tirons des Catalogues des étoiles fixes de *Ptolemée* & de *Flamſted* la latitude des étoiles, dont la longitude tombe dans la derniere moitié des Gemeaux A. 1700, où je cotterai les étoiles par les nombres marqués dans le Catalogue de *Ptolemée*.

Con-

Conſtellation Auriga

Nro.	Longitude A. 1700.	Latitude de Ptolem.	Latitude A. 1700.	
1	♊ 25°, 36′	30°, 0′	30°, 49′	Boreale
2	24 , 50	31 , 50	32 , 14	
3	17 , 32	22 , 30	22 , 52	
4	25 , 36	21 , 0	21 , 28	
5	23 , 58	15 , 15	15 , 41	
6	25 , 37	13 , 20	13 , 44	
7	14 , 31	20 , 40	20 , 54	
8	15 , 7	18 , 0	18 , 15	
9	14 , 19	18 , 0	18 , 10	
11	18 , 14	5 , 0	5 , 22	
12	19 , 50	8 , 30	8 , 51	
19	20 , 27	2 , 30	2 , 14 *m*	Conſt. Taurus.
14	29 , 7	1 , 30	0 , 56 *m*	Conſt. Gemini.
15	30 , 58	1 , 15	0 , 51 *m*	

De là on voit clairement, que la latitude de toutes ces étoiles, où elle eſt boreale, eſt devenuë conſidérablement plus grande depuis le tems de *Ptolemée* jusqu'à nous ; or celle des trois dernières, qui eſt méridionale, eſt devenuë plus petite : donc l'une & l'autre eſt parfaitement d'accord avec notre première régle. Si l'on compare de même maniere les autres étoiles, dont la longitude ne différe que d'un ſigne de cette poſition, on rencontrera pour la plûpart une ſemblable harmonie ; & quand on trouve le contraire, la différence eſt ſi énorme, qu'elle doit être attribuée à la bévuë d'un Copiſte, plutôt qu'à la négligence des obſervateurs.

XXXVI. Examinons de la même maniere les principales étoiles fixes, dont la longitude tomboit A. 1700. dans la derniere moitié de ♑, & l'Hiſtoire Celeſte de *Flamſted* nous fournit les ſuivantes :

Nro.	Longitude A. 1700	Latitude de Ptolem.	Latitude A. 1700.		
6	♆ 15°, 31′	49°, 30′	49°, 20′		Boreale
7	20 , 54	52 , 0	51 , 13		dans la Conſtellation
8	28 , 21	52 , 50	52 , 14		d'Hercules.
9	25 , 6	54 , 0	53 , 40		
10	24 , 49	53 , 0	52 , 44		
18	24 , 6	61 , 0	60 , 44		
19	15 , 31	69 , 20	69 , 19		
22	20 , 29	72 , 15	71 , 50		
13	15 , 58	10 , 30	10 , 18		Boreale
14	20 , 13	8 , 10	7 , 59		dans la Conſtellation
15	21 , 7	10 , 50	10 , 34		de Serpens.
16	25 , 48	20 , 0	19 , 48		
1	18 , 6	36 , 0	35 , 53	B	
2	21 , 1	27 , 15	27 , 58	B	
3	22 , 19	26 , 30	26 , 9	B	
9	20 , 15	15 , 0	5 , 16	B	dans la
10	25 , 25	31 , 40	13 , 43	B	Conſtellation
14	16 , 34	2 , 15	2 , 5	B	de Serpentarius.
15	17 , 3	1 , 30	1 , 48	M	
16	18 , 0	0 , 20	0 , 54	M	
17	19 , 1	0 , 45	0 , 31	B	
18	19 , 58	1 , 0	1 , 20		

Malgré quelques groſſières bévuës, la comparaiſon de la latitude de ces étoiles prouve auſſi ouvertement la vérité de notre Théorie ; & ſi l'on veut ſe donner la peine d'examiner encore d'autres étoiles, on en ſera encore plus convaincu. Il n'y a donc nul doute, qu'on ne puiſſe aſſigner par le moyen de notre table la véritable latitude de chaque étoile fixe pour tous les tems tant paſſés qu'à venir.

IV.

IV.

Détermination des changemens dans la longitude des étoiles fixes.

XXXVII. Ayant établi cy-deſſus la vraye longitude de la 1ère ♈ pour chaque époque propoſée, on en pourroit auſſi déterminer celle de toutes les autres étoiles, ſi leur différence en longitude demeuroit conſtamment la même. Mais, après avoir remarqué, qu'outre la variation & l'aberration commune leur différence en longitude eſt aſſujettie à un changement, qui eſt cauſé par l'action des planetes, je m'en vay déterminer ce changement. Suppoſant donc pour un tems propoſé la longitude d'une étoile $= \lambda$, ſa diſtance au pole boreal de l'écliptique $= p$, la longitude du nœud deſcendant de l'orbite de Jupiter $= 24$, & celle de l'orbite de Venus $= ♀$, nous avons vû cy-deſſus que la longitude de cette étoile doit diminuer pendant le cours d'un ſiecle de la quantité

$$\frac{18 \text{ ſin } (\lambda - 24) + 32 \text{ ſin } (\lambda - ♀)}{\text{tang } p} \text{ ſecondes.}$$

Donc, puiſqu'on peut mettre pour tout tems au lieu des quantités λ, 24 & ♀ leurs valeurs, qu'elles ont eu au commencement de ce ſiecle, ou A. 1700, λ marque la longitude d'une étoile A. 1700, la diminution ſeculaire de la longitude de cette étoile ſera :

$$\frac{18(\text{ſin}\,\lambda - 270° - 8°) + 32 \text{ ſin}(\lambda - 270° + 16°)}{\text{tang } p} \text{ ſeconde,}$$

ou $\dfrac{18 \text{ cof } (\lambda - 8°) + 32 \text{ cof } (\lambda + 16°)}{\text{tang } p}$ ſecondes, qui ſe réduit à $\dfrac{48 \text{ cof}\,\lambda - 6 \text{ ſin}\,\lambda}{\text{tang } p} = \dfrac{48 \text{ cof } (\lambda + 8°)}{\text{tang } p}$ ſecondes.

XXXVIII. Donc, ſi nous conſidérons deux étoiles, dont la longitude de l'une ait été $= -8°$, ou $11^s, 22°$ A. 1700, & de l'au-

$5^{s}, 22°$, la différence entre leur longitude aura été de $6'$; mais en ſuppoſant p la diſtance de la première au pole de l'écliptique, & q celle de l'autre, la longitude de la première diminuera pendant le cours d'un ſiecle de $\frac{48}{\text{tang}\, p}$ ſec. où elle ſera après un ſiecle $11^{s}, 22° - \frac{48''}{\text{tang}\, p}$, or celle de l'autre ſera après un ſiecle $5^{s}, 22° + \frac{48''}{\text{tang}\, q}$; & partant leur différence en longitude ſera $6^{s} - 48''(\cot p + \cot q)$, ou diminuera de $48''(\cot p + \cot q)$; or A. 1600. elle a été d'autant plus grande. Donc A. 0. il faut que cette différence en longitude ait été de $13\frac{1}{3}(\cot p + \cot q)$ min. plus grande. Telles étoiles ſont celle de n°. 27 de la grande Ourſe, & n°. 10 du Dragon; la latitude de celle là étant $54°, 27'$, & de celle-cy $81°, 48'$. Or on trouve

La longitude	A. 1700	au tems de *Ptolem.*
de la première	$5^{s}, 22°, 34$	$4^{s}, 29°, 50'$
de l'autre	$11, 29, 23$	$11, 8, 0$
Diff. en long.	$6, 6, 49$	$6, 8, 10$

de ſorte que la différence en longitude de ces deux étoiles a été du tems de *Ptolemée* de $1°, 21'$ plus grande qu'aujourdhui; ce qui répond parfaitement bien à notre Théorie rapportée à l'intervalle du tems entre *Ptolemée* & nous; car puiſque $\cot p + \cot q$ devient $= 8$, ce changement ſe trouve ſi grand. Mais j'ai deja remarqué, que ces formules ne ſauroient plus avoir lieu, lorsque les étoiles ſeroient encore plus proches au pole de l'écliptique.

XXXIX. Puisque les étoiles proches de l'écliptique ne ſont pas aſſujetties à ce changement, la première étoile d'Aries ne l'eſt pas non plus, & partant ſa longitude marquée cy-deſſus n'a plus beſoin de correction de ce côté. Donc notre formule $\frac{48 \cos(\lambda + 8°)}{\text{tang}\, p}$ ſec. marquera de combien la longitude d'une étoile comptée depuis la $1{*}\Upsilon$ di-

mi-

minuë pendant le cours d'un ſiecle. Pour le numérateur de notre formule, il eſt évident que ſes valeurs pour chaque étoile pourroient être tirées de la Table de l'article précédent : cependant il ſera bon d'en donner une Table à part

TABLE

qui ſert pour trouver le changement dans la longitude des étoiles fixes pour un ſiècle.

Arg. La longitude de l'étoile A. 1700.

gr.	♈ dimin. ♎ augm.	♉ dimin. ♏ augm.	♊ dimin. ♐ augm.	♋ augm. ♑ dimin.	♌ augm. ♒ dimin.	♍ augm. ♓ dimin.
0	47″, 5	37″, 8	18″, 0	6″, 7	29″, 5	44″, 5
3	47 , 1	36 , 2	15 , 6	9 , 2	31 , 5	45 , 4
6	46 , 6	34 , 5	13 , 2	11 , 6	33 , 4	46 , 1
9	45 , 9	32 , 8	10 , 8	14 , 0	35 , 1	46 , 8
12	45 , 1	30 , 8	8 , 4	16 , 4	36 , 8	47 , 3
15	44 , 2	28 , 8	5 , 9	18 , 8	38 , 3	47 , 6
18	43 , 2	26 , 8	3 , 4	21 , 0	39 , 8	47 , 9
21	42 , 0	24 , 7	0 , 9	23 , 3	41 , 1	48 , 0
24	40 , 7	22 , 5	1 , 7	25 , 4	42 , 4	48 , 0
27	39 , 3	20 , 2	4 , 2	27 , 5	43 , 5	47 , 8
30	37 , 8	18 , 0	6 , 7	29 , 5	44 , 5	47 , 5

Cette table ne marque pas les changemens ſeculaires mêmes, mais après en avoir tiré la valeur pour une étoile donnée, il la faut encore diviſer par la tangente de ſa diſtance au pole boreal de l'écliptique, le ſinus total étant = 1, & le quotient donnera l'augmentation ou diminution ſeculaire de la longitude de cette étoile comptée depuis 1 ✱ ♈. Or il faut obſerver, que lorsque la latitude de l'étoile eſt méridionale, la tangente de ſa diſtance au pole boreal de l'écliptique devient négative, d'où les titres de *augm.* & *dimin.* ſeront changés.

XL.

XL. Pour éclaircir ces changemens tant en longitude qu'en latitude par un exemple, ſoit propoſée l'étoile nommée α de la Lyre, dont M. *le Monnier* marque pour A. 1700. la longitude ♑ 11°, 48′, 45″, la latitude 61°, 45′ 51″ *b*. Donc pour ſa latitude notre Table marque, qu'elle augmente pendant chaque ſiecle de $45\frac{3}{10}$ ſec. par conſéquent la latitude moyenne de cette étoile fut autrefois plus petite, & du tems de *Ptolemée*, ou A. 150. elle a été 61°, 33′, 10″. Or pour la longitude notre table donne $15\frac{6}{10}$ ſec. dim. qu'il faut encore multiplier par la tangente de la latitude, d'où l'on obtient 30″ dimin. Donc la longitude de cette étoile priſe depuis 1*♈ diminuë de 30″ par ſiecle, & autrefois elle aura été plus grande qu'à préſent, & cela de 8′ A. 150. Or pour A. 1750. nous avons

La longitude de 1*♈	= 0ˢ, 29°, 41′, 8′	
La long. de α de la Lyre	= 9, 11, 48, 45	
différence	8, 12, 7, 37	
ajoutez y	8′, 0″	
Diff. pour A. 150. . .	8, 12, 15, 37	
ajout. long. 1*♈ A. 150. .	0, 7, 28, 41	
Long. de α de la Lyre A. 150.	8, 19, 44, 18.	

Donc pour l'étoile α de la Lyre nous avons :

	Long. moy.	Latit. moy.
A. 1750	♑ 11°, 48′, 45″	61°, 45′, 15″ *b*
A. 150	♐ 19, 44, 18	61, 33, 10 *b*.

De cette maniere on ne trouve que le lieu moyen des étoiles, qu'il faut enſuite encore corriger tant par les tables de l'aberration, que par celles de la variation, qu'on trouve déjà conſtruites pour l'uſage de l'Aſtronomie.

ECLAIR-

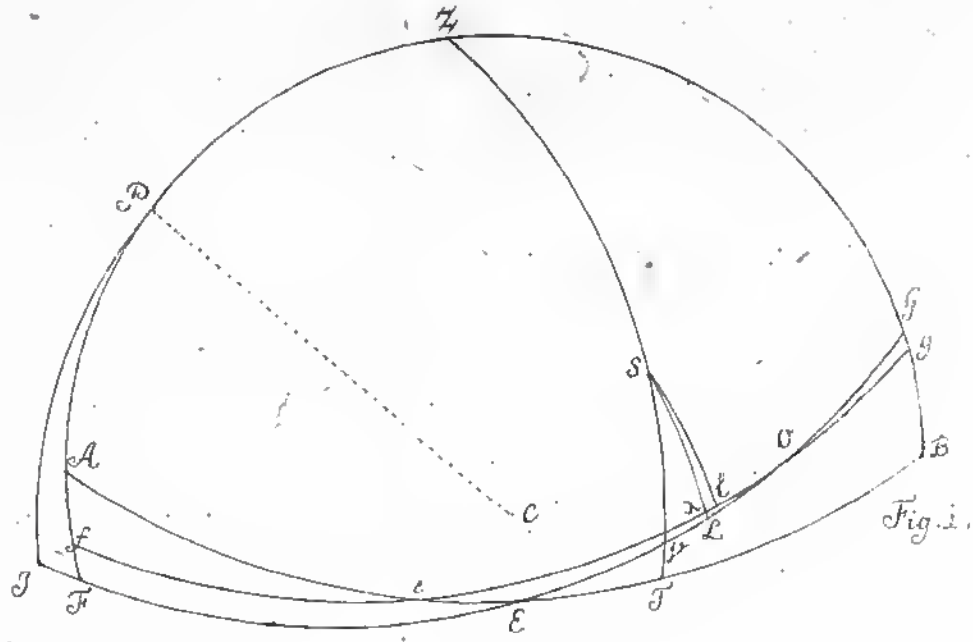

Fig. 1.

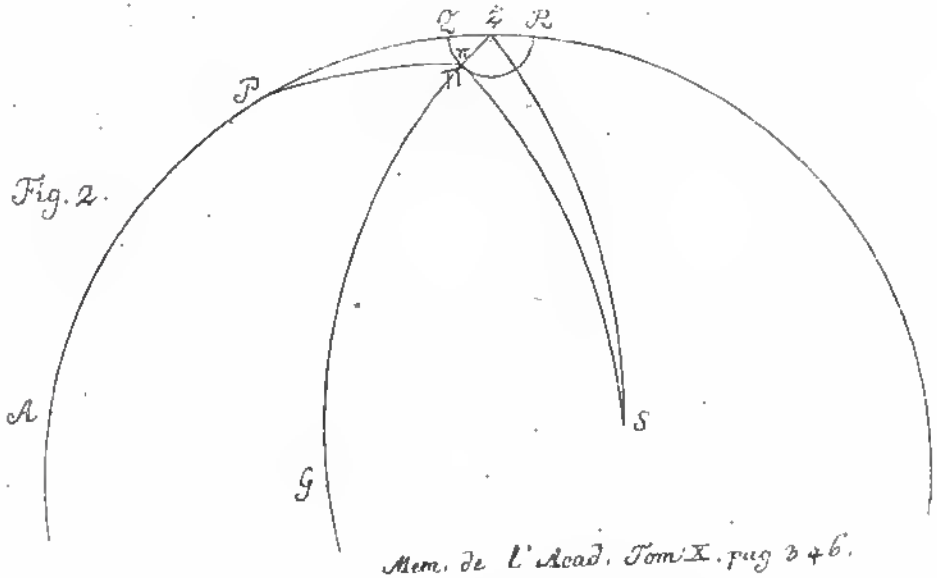

Fig. 2.

Mem. de l'Acad. Tom. X. pag. 346.